Teoría de Juegos

Juegos Dinámicos con Información Perfecta

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

2023-1

Teoría de Juegos
Juegos Dinámicos con Información Perfecta

- Juegos Dinámicos con Información Perfecta
  - Introducción
  - Forma Extensiva
  - Estrategias
  - Dominación y Equilibrio de Nash
  - Inducción inversa
  - Juegos de dos jugadores de conflicto puro
  - Ejemplos
  - Aplicaciones
    - Stackelberg
    - Negociación

- Veremos juegos dinámicos, en estos juegos las acciones son tomadas secuencialmente.

⊙ Al ser secuenciales, en cada momento de decisión por parte de un jugador, este puede disponer de información, la "historia" del juego, las jugadas anteriores.

⊙ En esta sesión veremos juegos de información perfecta: cada jugador en su turno conoce la historia completa de las decisiones tomadas antes. No hay "acciones ocultas".

⊙ Estos juegos se pueden representar de manera apropiada por medio de una árbol, lo que nos dará un modo gráfico de expresarlos.

- Empecemos con un juego sencillo de esta categoría:

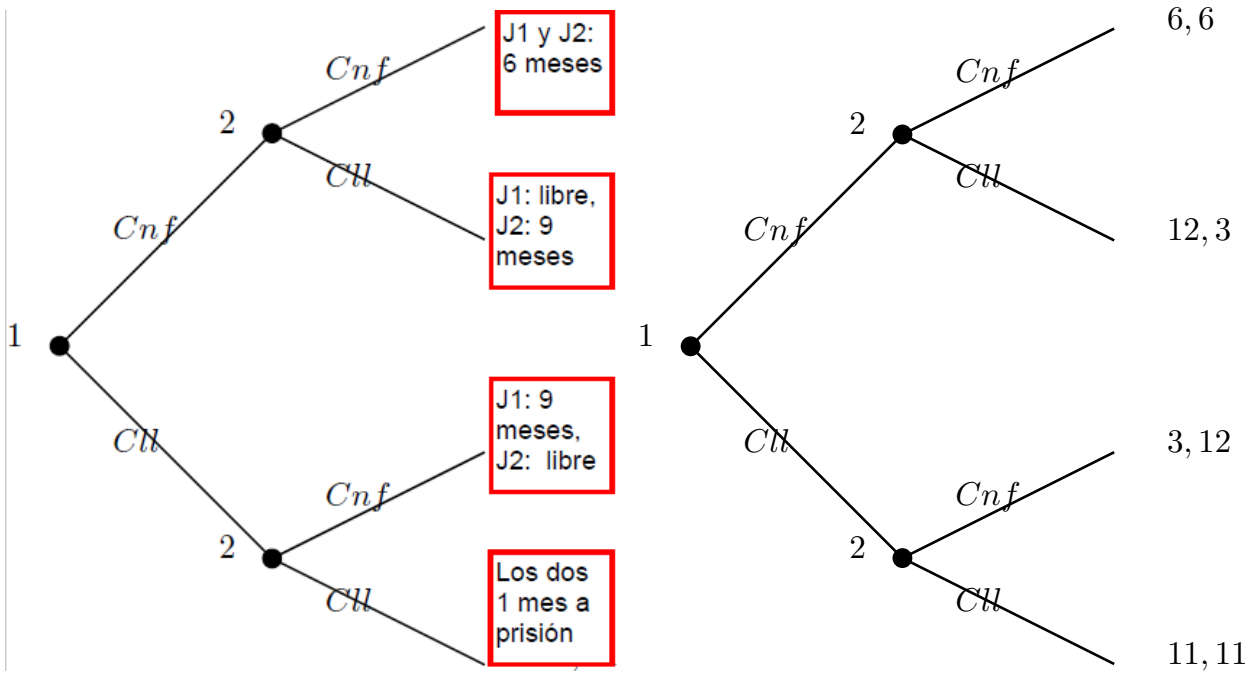
⊙ Tenemos dos jugadores, cada jugador posee dos acciones posibles.

⊙ Primero el jugador 1 elige su acción

⊙ El jugador 2 observa esta elección y elige a su vez su acción.

⊙ El juego termina en un resultado determinado por las dos acciones y cada jugador obtiene el pago correspondiente.

El dilema del prisionero secuencial:



- Un árbol dirigido y arraigado es un conjunto de nodos unidos por aristas dirigidas (salen de un nodo y llegan a otro) de manera que:
  1. Hay un único nodo, la raíz, al que no llega ninguna arista, a todos los demás nodos llega una única arista.
  2. Hay algunos nodos de los que no sale ninguna arista, llamados nodos terminales. Los nodos no terminales son nodos de decisión
  3. Existe una única secuencia de aristas (un único camino) que lleva de la raíz a cualquier otro nodo.

Definition 3.1.1 A *rooted directed tree* consists of a set of nodes and directed edges joining them.

- The root of the tree has no directed edges leading to it (has indegree 0), while every other node has exactly one directed edge leading to it (has indegree 1).
- There is a unique path (that is, a unique sequence of directed edges) leading from the root to any other node. A node that has no directed edges out of it (has outdegree 0) is called a *terminal node*, while every other node is called a *decision node*.
- We shall denote the set of nodes by X, the set of decision nodes by D and the set of terminal nodes by Z. Thus $X = D \cup Z$.

- En un árbol dirigido y arraigado todo nodo, salvo la raíz, tiene un antecesor directo: el nodo de donde sale la arista que llega a él.

⊙ En un árbol dirigido y arraigado todo nodo, salvo los terminales, tiene al menos un sucesor directo: un nodo al que llega una arista que sale de él.

⊙ Desde cualquier nodo podemos reconstruir la historia que le corresponde: la sucesión de aristas desde la raíz hasta él.

- Sobre la estructura de un árbol arraigado y dirigido podemos poner los elementos básicos de un juego para tener la forma-marco extensiva con información perfecta:

⊙ Los jugadores $I = \{1, \ldots, n\}$. A cada nodo no terminal le corresponde un jugador. A un jugador le pueden corresponder varios nodos.

⊙ Las acciones A. A cada arista le corresponde una acción, dos aristas que salen del mismo nodo nunca tienen asignada la misma acción.

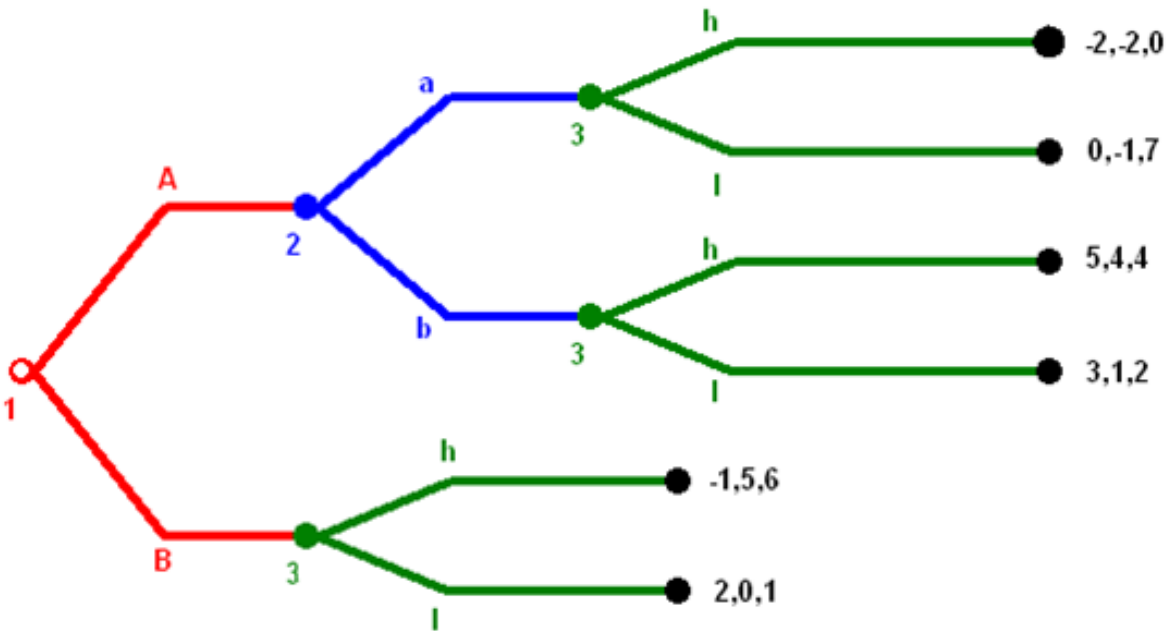
⊙ Los resultados O. A cada nodo terminal le corresponde un resultado.

Definition 3.1.2 A *finite extensive form (or frame) with perfect information* consists of the following items.

- A finite rooted directed tree.
- A set of players $I = \{1, \ldots, n\}$ and a function that assigns one player to every decision node.
- A set of actions A and a function that assigns one action to every directed edge, satisfying the restriction that no two edges out of the same node are assigned the same action.
- A set of outcomes O and a function that assigns an outcome to every terminal node.

- Finalmente si consideramos las preferencias de cada jugador sobre los resultados, tenemos la forma extensiva con información perfecta de un juego:

Definition 3.1.3 A *finite extensive game with perfect information* is a finite extensive form with perfect information together with a ranking $\succsim_i$ of the set of outcomes O, for every player $i \in I$.

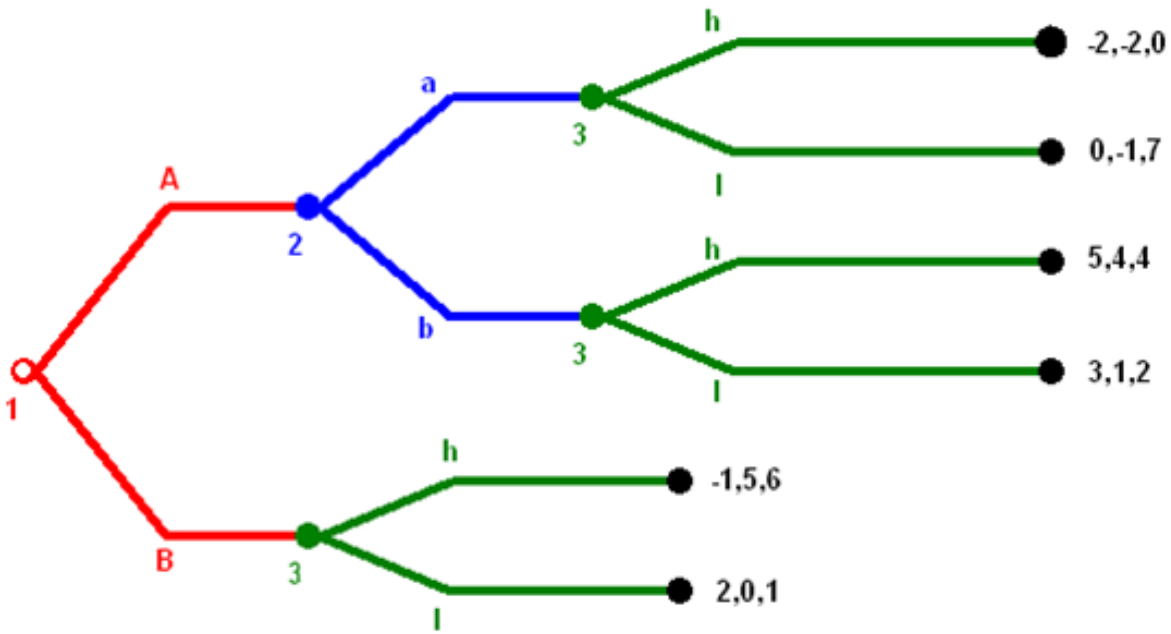


- En un juego dinámico llamamos estrategia a un plan de juego completo para cierto agente.

⊙ Una estrategia para el jugador *i* especifica una acción para cada nodo asignado al jugador *i*.

⊙ Un perfil de estrategias determina una estrategia para cada jugador.

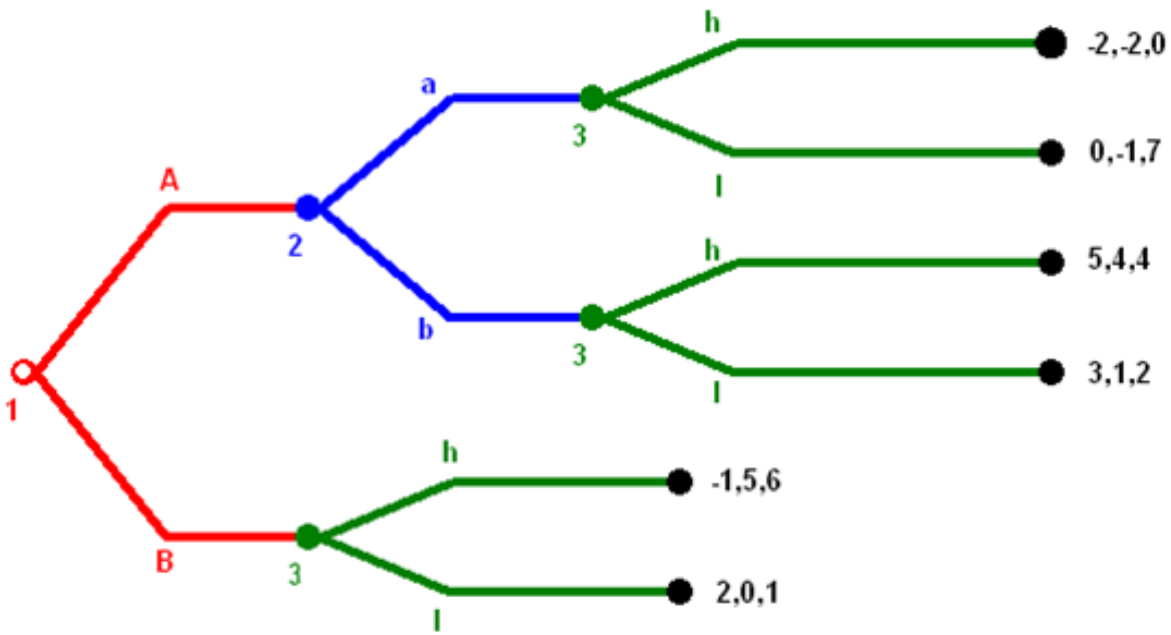
⊙ Un perfil de estrategias define un nodo terminal y por lo tanto un resultado del juego.



- En un perfil de estrategias puede haber acciones que, por las decisiones anteriores, no llegarán a ser jugadas.

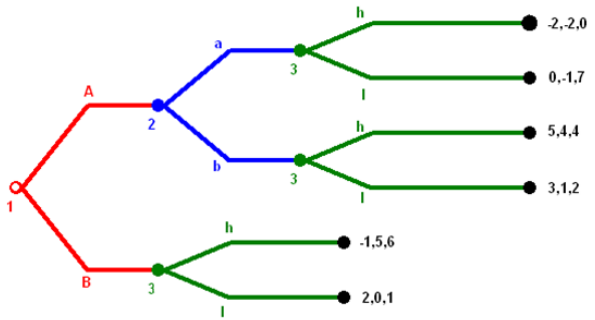
⊙ La secuencia de acciones efectivamente jugadas define una historia, el desarrollo del juego.

⊙ La diferencia entre perfil de estrategias y desarrollo del juego es importante.



- De la forma extensiva con información perfecta de un juego podemos obtener su forma normal reducida.

⊙ Al hacerlo perdemos información que puede, o no, ser relevante.



$S_1 = \{A, B\}$
$S_2 = \{a, b\}$
$S_3 = \{hhh, hhl, hlh, hll, lhh, lhl, llh, lll\}$

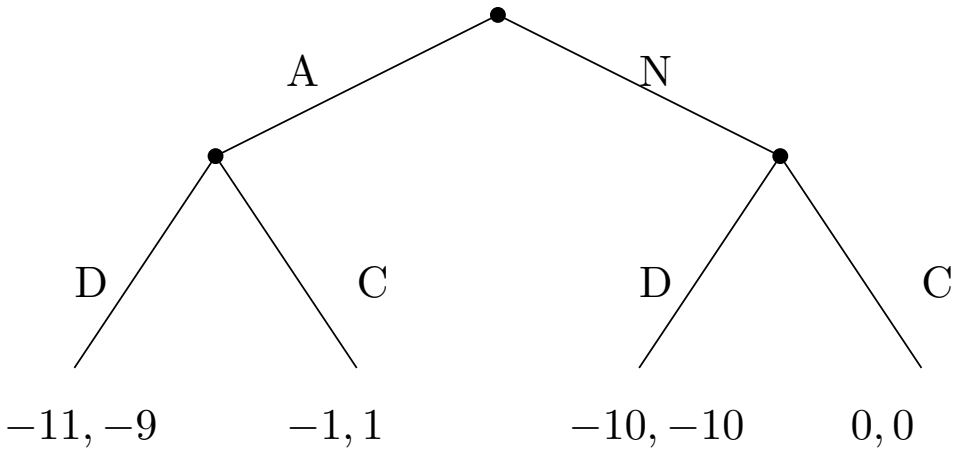
$\Pi(B, *, h**) = (-1, 5, 6)$
$\Pi(B, *, l**) = (2, 0, 1)$
$\Pi(A, a, **h) = (-2, -2, 0)$
$\Pi(A, a, **l) = (0, -1, 7)$
$\Pi(A, b, *h*) = (5, 4, 4)$
$\Pi(A, b, *l*) = (3, 1, 2)$

- Todo juego finito secuencial puede ser escrito en forma estratégica

⊙ En esa forma estratégica podemos investigar dominaciones y equilibrios de Nash.

⊙ Una vez encontrados (o no) los equilibrios, podemos volver a la forma extensiva y obtener el desarrollo del juego.

Ejemplo:



≀

	DD	*DC*	*CD*	*CC*
A	$-11,-9$	$-11,-9$	$-1,1$	$-1,1$
N	$-10,-10$	$0,0$	$-10,-10$	$0,0$

Regla 1

Mire hacia adelante y razone hacia atrás

- Tomando en cuenta esta regla, los juegos dinámicos finitos y de información perfecta se pueden resolver empezando por el final y luego retrocediendo hacía el comienzo del juego.
- A este procedimiento se le conoce como **inducción inversa**.

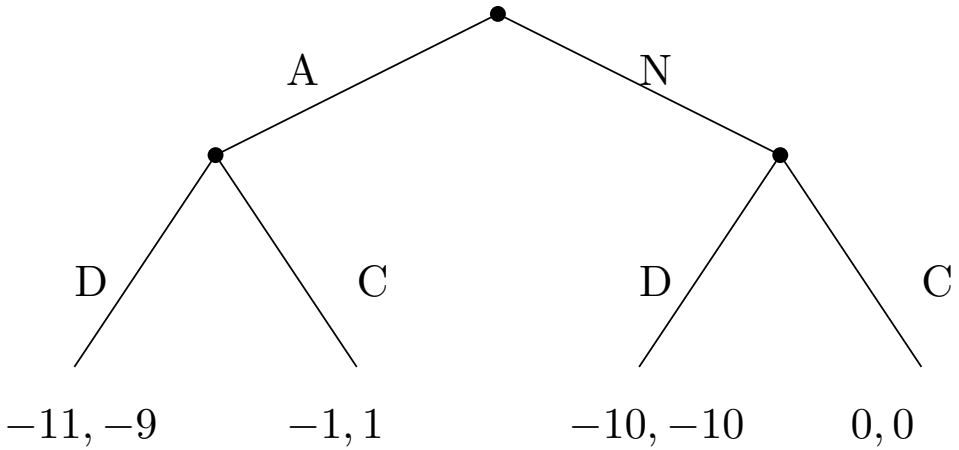
Inducción Inversa

1. Encuentre un nodo cuyos sucesores tengan todos asignado un perfil de utilidades (Un nodo con todos sus sucesores terminales, por ejemplo). Para ese nodo:
   1. Encuentre la acción, del jugador asignado a ese nodo, que lleve al nodo con el mayor pago para él.
   2. Asigne al nodo la acción y el perfil de pagos consecuente.
2. Repita hasta llegar a la raíz.

⊙ TODAS las acciones encontradas, una para cada nodo en el juego, conforman el perfil de estrategias que es la solución del juego por inducción inversa.

⊙ Como todo perfil, este determina el resultado y un desarrollo del juego.

Ejemplo:



≀

	DD	*DC*	*CD*	*CC*
A	$-11, -9$	$-11, -9$	$-1, 1$	$-1, 1$
N	$-10, -10$	$0, 0$	$-10, -10$	$0, 0$

- El juego que hemos visto tiene dos EN y uno de ellos corresponde a la solución por inducción inversa. ¿

Zermelo

Todo juego secuencial (dinámico) finito de información completa y perfecta tiene por lo menos una solución por inducción inversa. Toda solución por inducción inversa corresponde a un Equilibrio de Nash.

⊙ Pero no todo EN de la forma extensa es una solución por inducción inversa.

- Los EN que no corresponden a una solución por inducción inversa incluyen acciones (fuera del desarrollo del juego bajo ese perfil) que llegado el momento no serían tomadas.

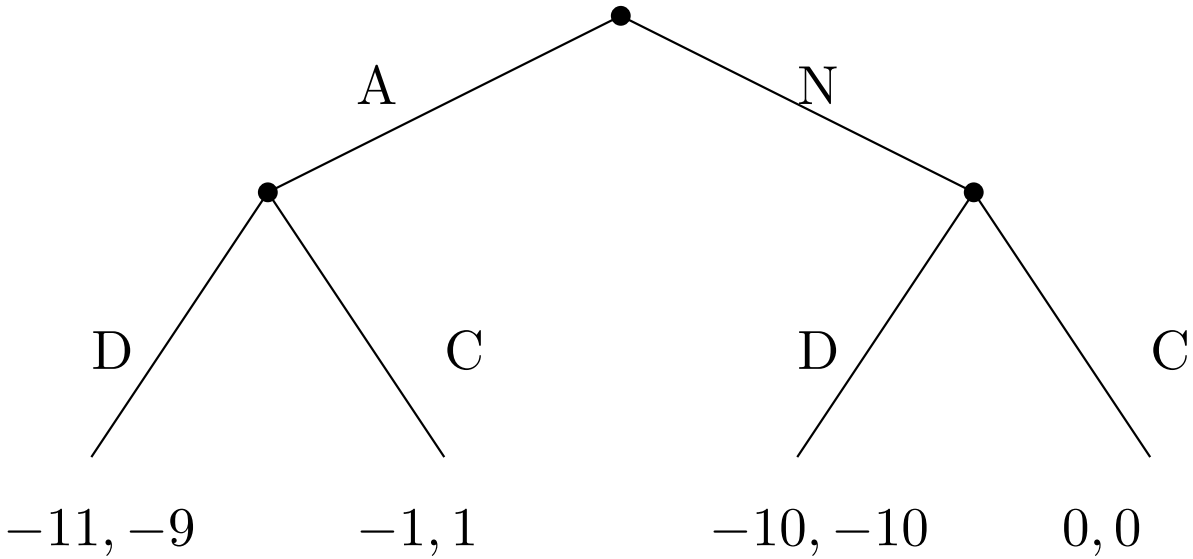
⊙ Esto está asociado coloquialmente a *amenazas no creíbles*.

⊙ Desde otro punto de vista los EN encontrados por inducción inversa inducen EN en todo subjuego (lo que se juega a partir de un nodo que no es la raiz). A esto se llama ser *Perfecto en SubJuegos*

⊙ Si un equilibrio de Nash involucra amenazas no creíbles, entonces no es perfecto en subjuegos.

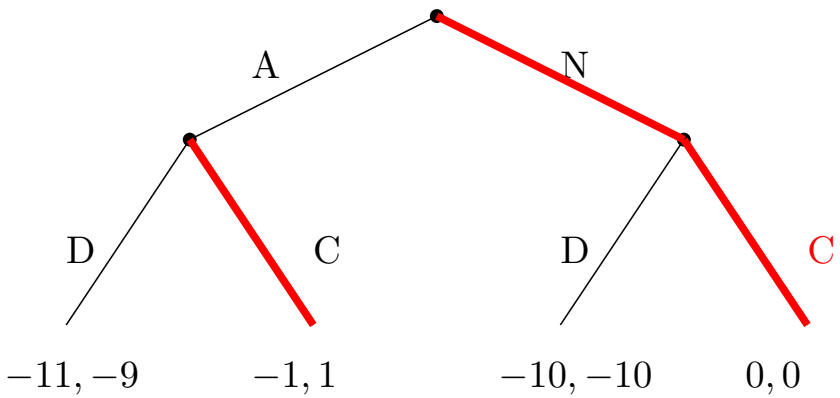
El juego de la amenaza:

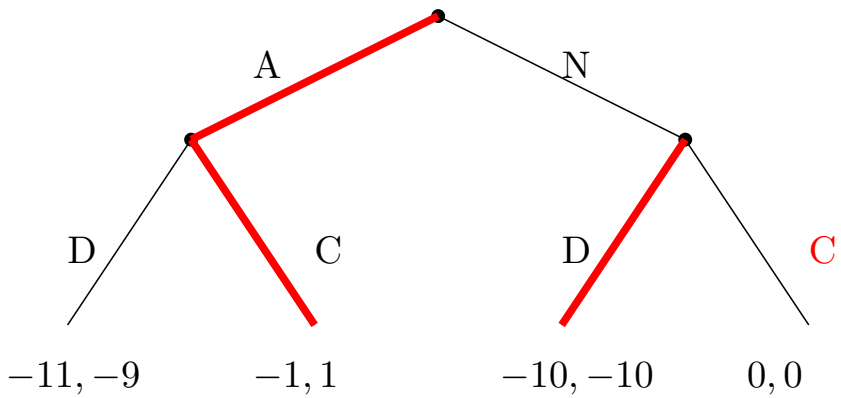
Ya hemos visto este juego:



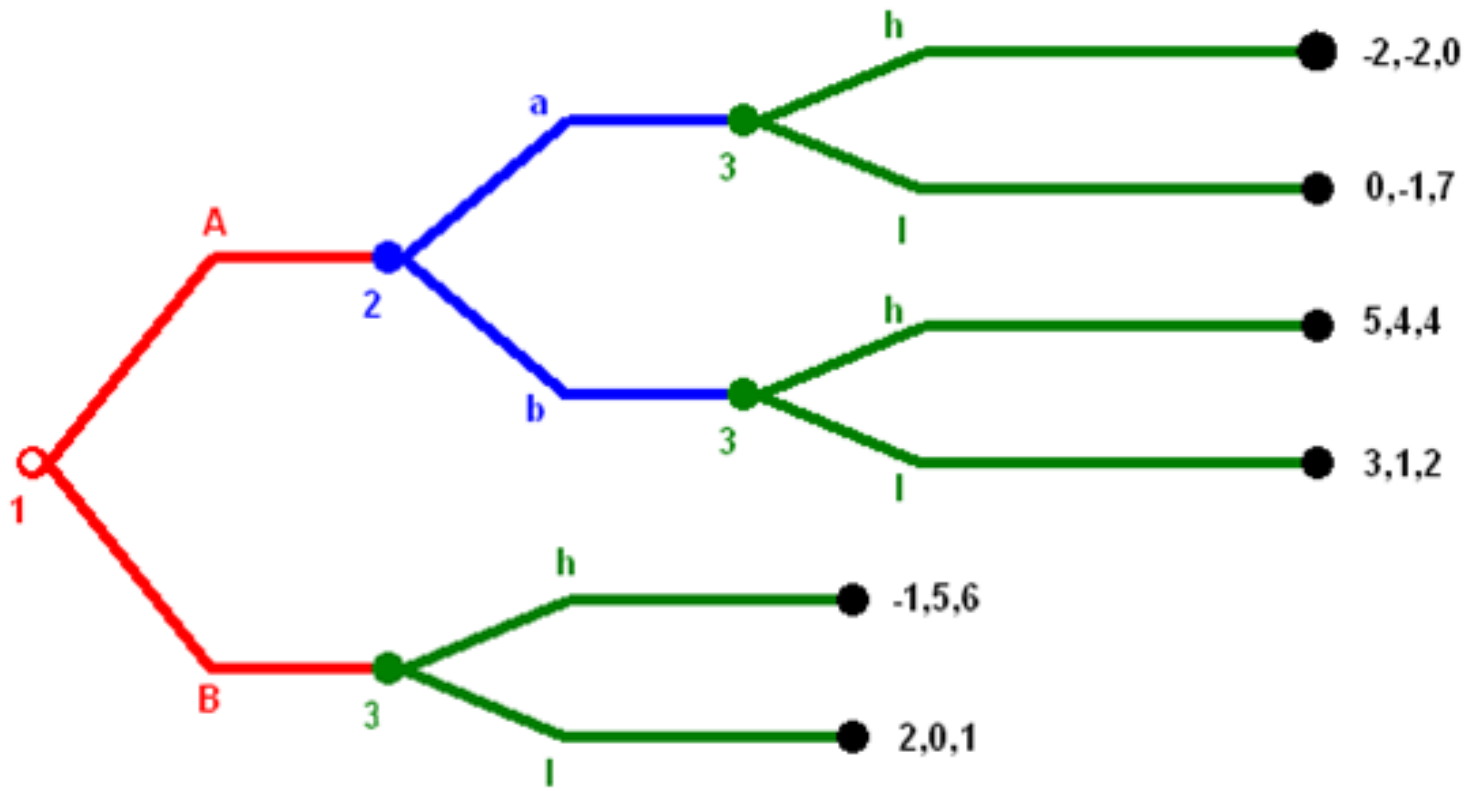
- Asignemos esta historia a él:
- El jugador 1 decide si le entrega o no 1 sol al jugador 2.
- Luego de la decisión del jugador 1, el jugador 2 debe decidir si denuncia al jugador 1, en ese caso *ambos* tendrán que pagar una multa de 10 soles.

El juego de la amenaza:





Un juego con tres jugadores



- (A, B, lhh)
- (B, a, hhh)

- Consideremos un juego secuencial finito de información perfecta con dos jugadores y dos resultados posibles: Gana 1(=Pierde 2) y Gana 2(=Pierde 1)

⊙ Asumimos que cada jugador prefiere ganar a perder, así que los pagos finales son $(1, 0)$ si Gana 1 y $(0, 1)$ si Gana 2.

⊙ Este tipo de juegos tiene una "solución" simple, alguno de los dos jugadores tiene una estrategia que le garantiza ganar. ≀ Depende del juego cuál de los dos.

⊙ Ejemplo: Nim : `http://nosolomates.es/nim.htm`

- Consideremos un tercer resultado posible : Empate

⊙ Asumimos que cada jugador prefiere ganar a empatar y empatar a perder, así que los pagos finales son $(2, 0)$ si Gana 1, $(0, 2)$ si Gana 2 y $(1, 1)$ si empatan.

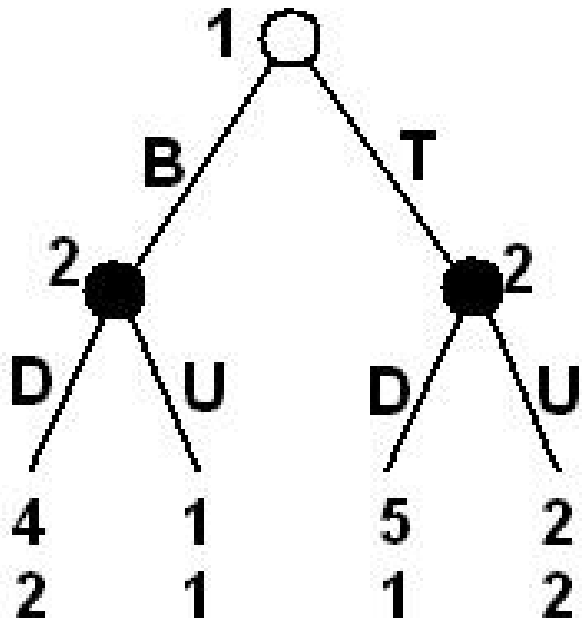
⊙ Este tipo de juegos también tiene una "solución" simple, o alguno de los dos jugadores tiene una estrategia que le garantiza ganar o tiene una estrategia que le garantiza que el otro jugador no gane.

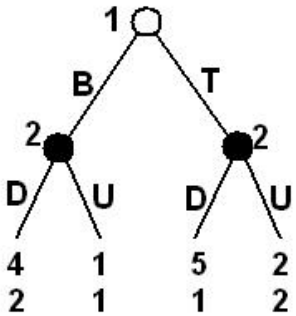
⊙ Ejemplo: Tres en raya

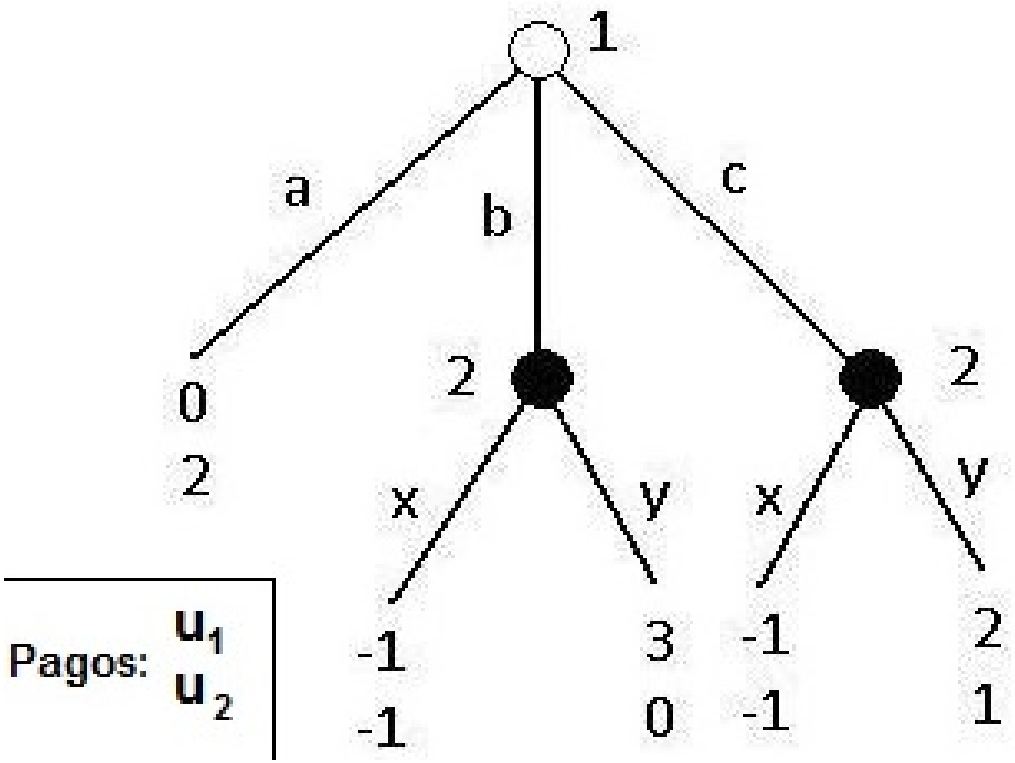
⊙ Ejemplo: Ajedrez

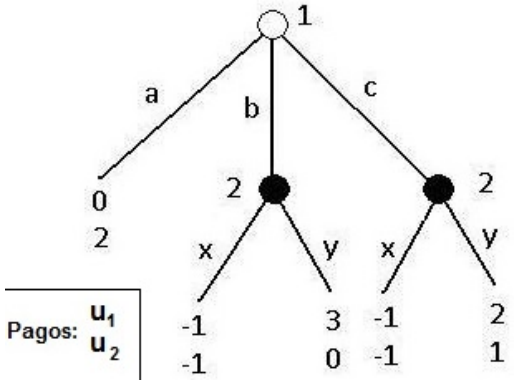
`https://www.xatakaciencia.com/matematicas/las-cifras-mas-alucinantes-del-ajedrez`

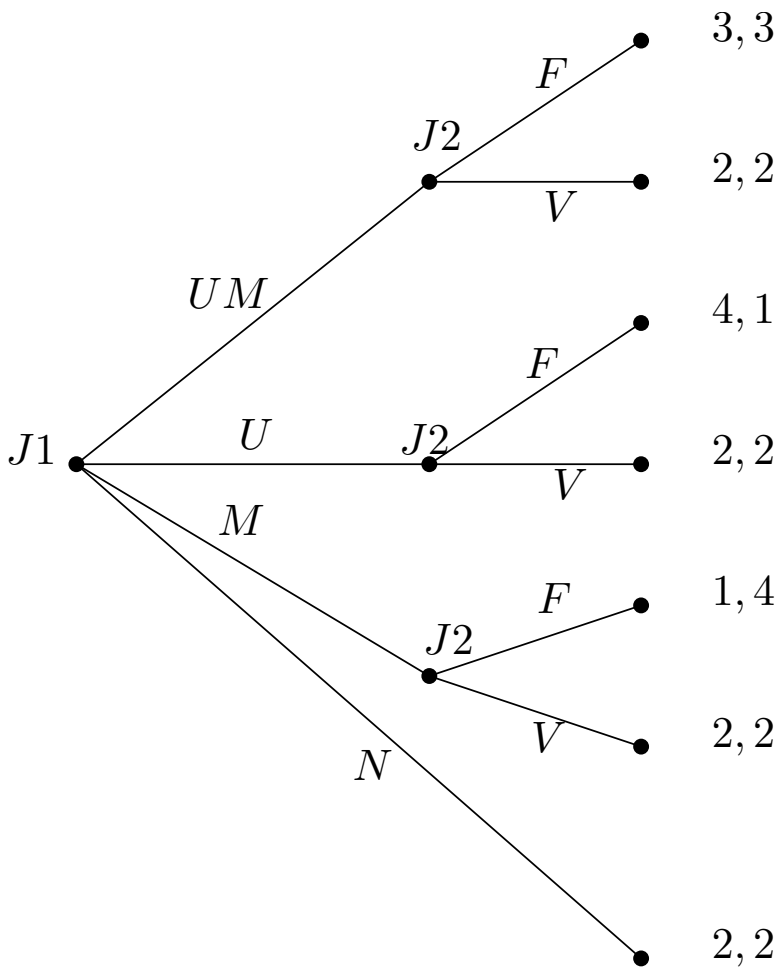
`https://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/cuantas-partidas-ajedrez-existen.html`

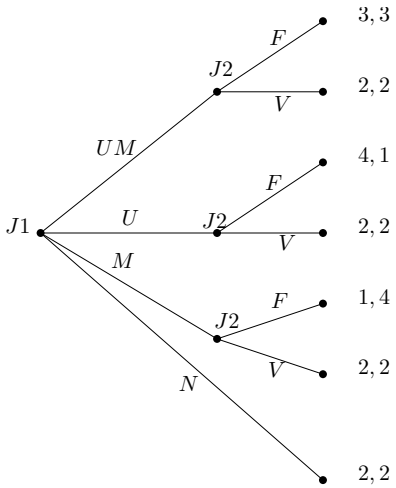

1
B
T
2
2
D
U
D
U
4
2
1
1
5
1
2
2

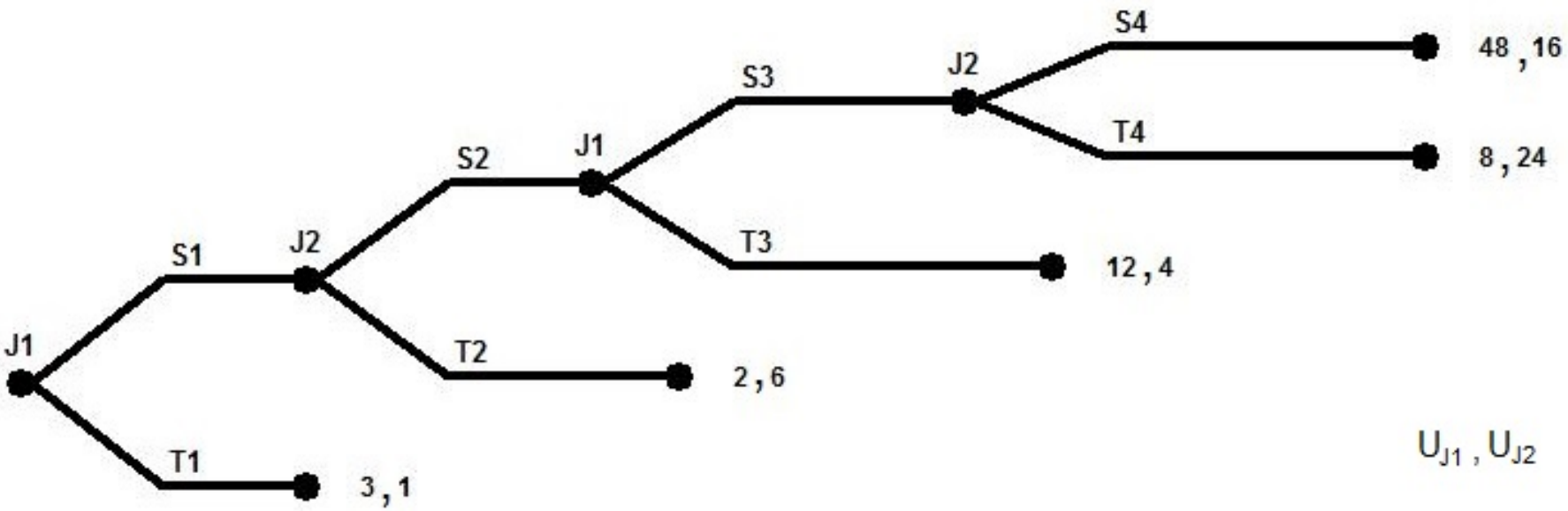

1
B
T
2
2
D
U
D
U
4
2
1
1
5
1
2
2

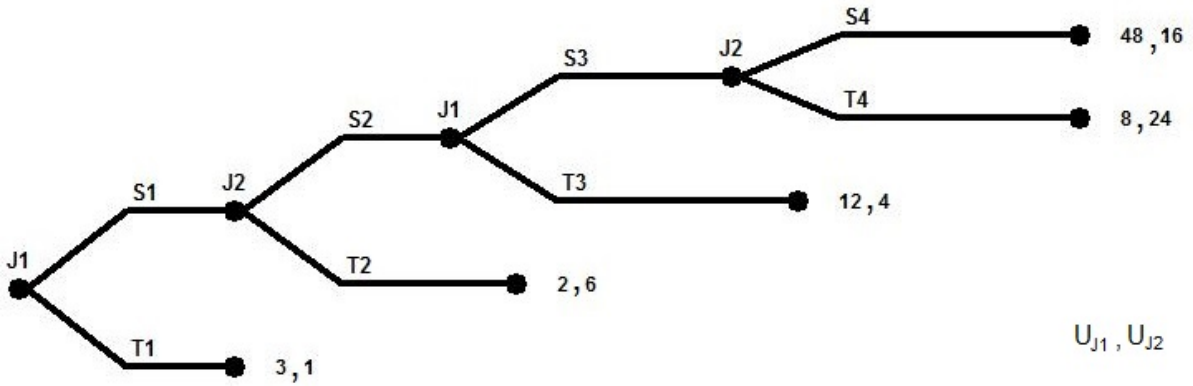

1
a
b
c
0
2
2
2
x
y
x
y
-1
-1
3
0
-1
-1
2
1
Pagos: u_1
u_2

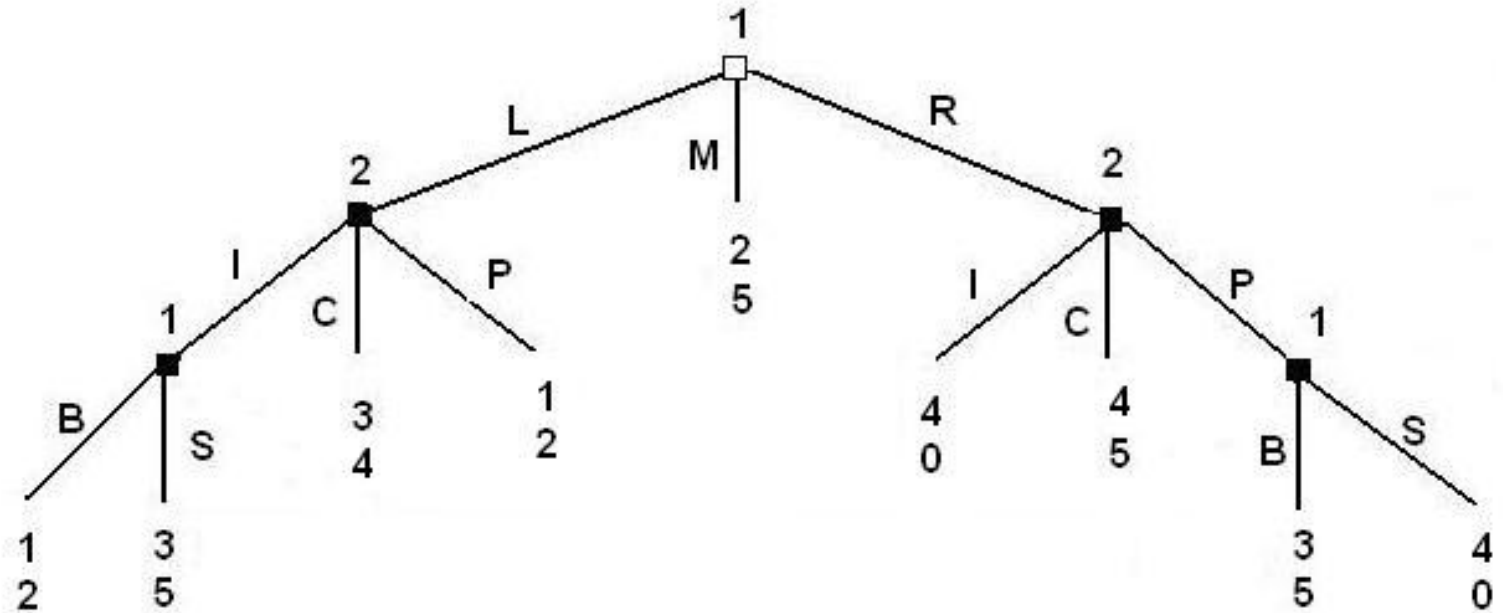

1
a
b
c
0
2
2
2
x
y
x
y
-1
-1
3
0
-1
-1
2
1
Pagos: u_1
u_2

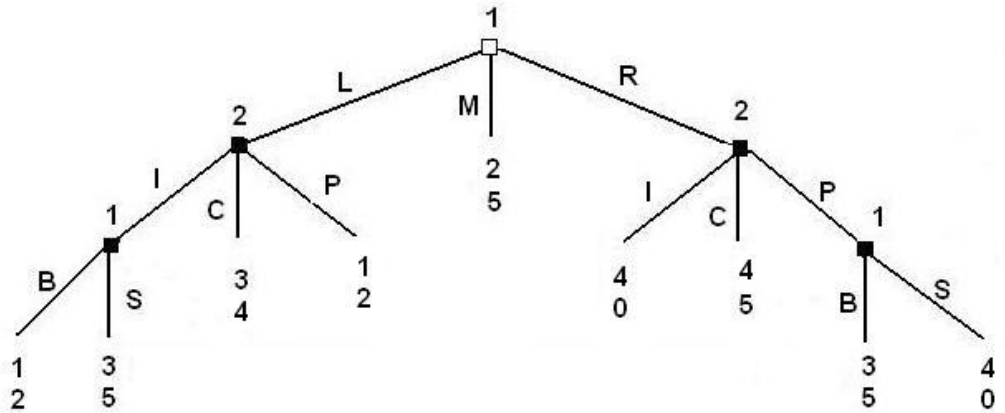

3, 3
F
J2
2, 2
V
UM
4, 1
F
J1
U
J2
2, 2
V
M
F
1, 4
J2
V
2, 2
N
2, 2

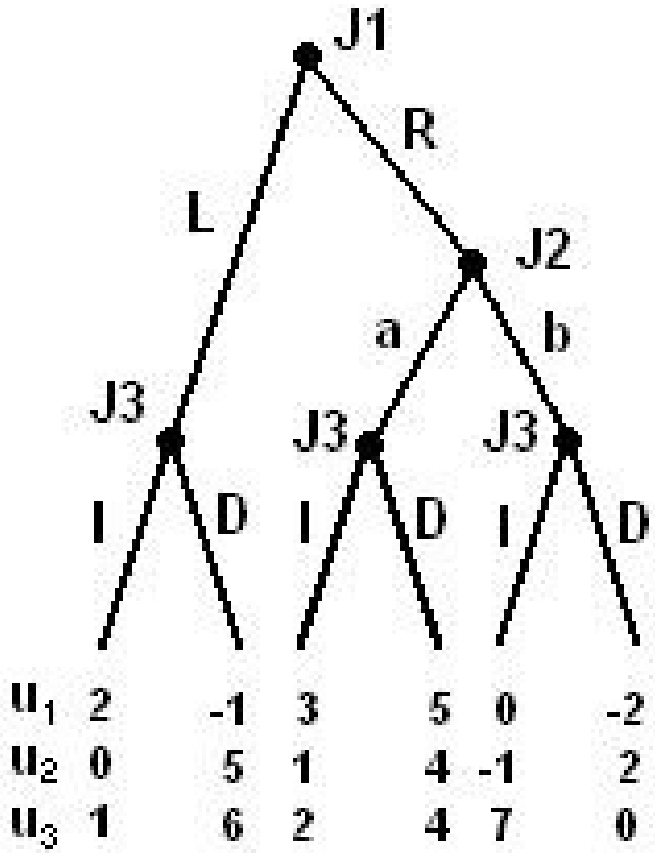

J1
UM
U
M
N
J2
J2
J2
F
V
F
V
F
V
3, 3
2, 2
4, 1
2, 2
1, 4
2, 2
2, 2

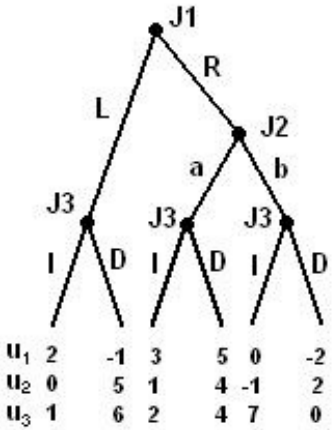

J1
S1
T1
3 , 1
J2
S2
T2
2 , 6
J1
S3
T3
12 , 4
J2
S4
T4
48 , 16
8 , 24
U_{J1} , U_{J2}

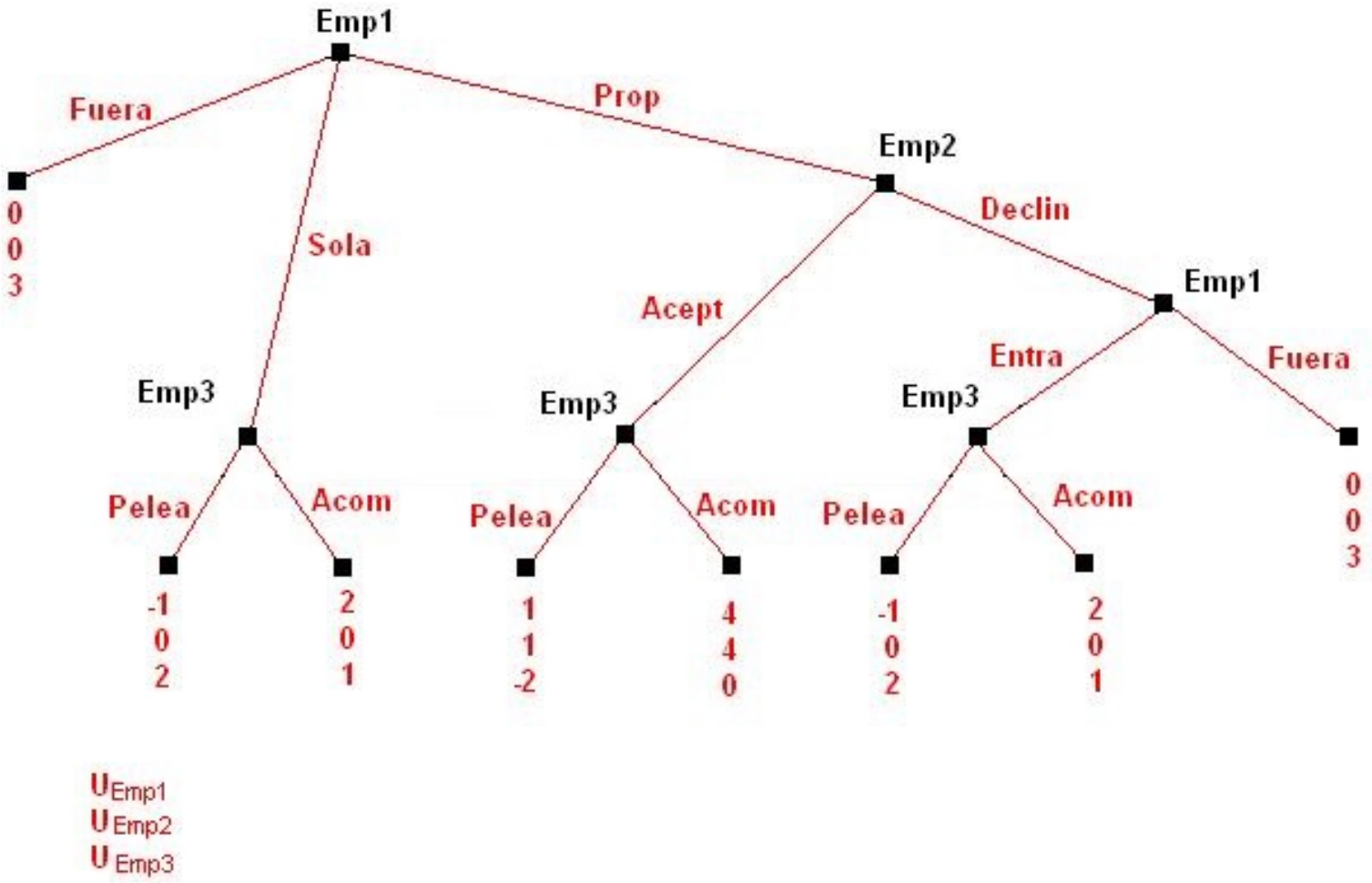

J1
S1
T1
3 , 1
J2
S2
T2
2 , 6
J1
S3
T3
12 , 4
J2
S4
T4
48 , 16
8 , 24
U_{J1} , U_{J2}


1
L
M
R
2
2
I
C
P
2
5
I
C
P
1
1
B
S
3
4
1
2
4
0
4
5
B
S
1
2
3
5
3
5
4
0


1
L
M
R
2
2
I
C
P
1
B
S
1
2
3
4
1
2
2
5
I
C
P
1
4
0
4
5
B
S
3
5
4
0


J1
R
L
J2
a
b
J3
J3
J3
I
D
I
D
I
D
u_1 2 -1 3 5 0 -2
u_2 0 5 1 4 -1 2
u_3 1 6 2 4 7 0


J1
L
R
J2
a
b
J3
J3
J3
I
D
I
D
I
D
u1 2 -1 3 5 0 -2
u2 0 5 1 4 -1 2
u3 1 6 2 4 7 0


Emp1
Fuera
Prop
Sola
0
0
3
Emp2
Declin
Acept
Emp1
Entra
Fuera
Emp3
Emp3
Emp3
Pelea
Acom
Pelea
Acom
Pelea
Acom
-1
0
2
2
0
1
1
1
-2
4
4
0
-1
0
2
2
0
1
0
0
3
U Emp1
U Emp2
U Emp3

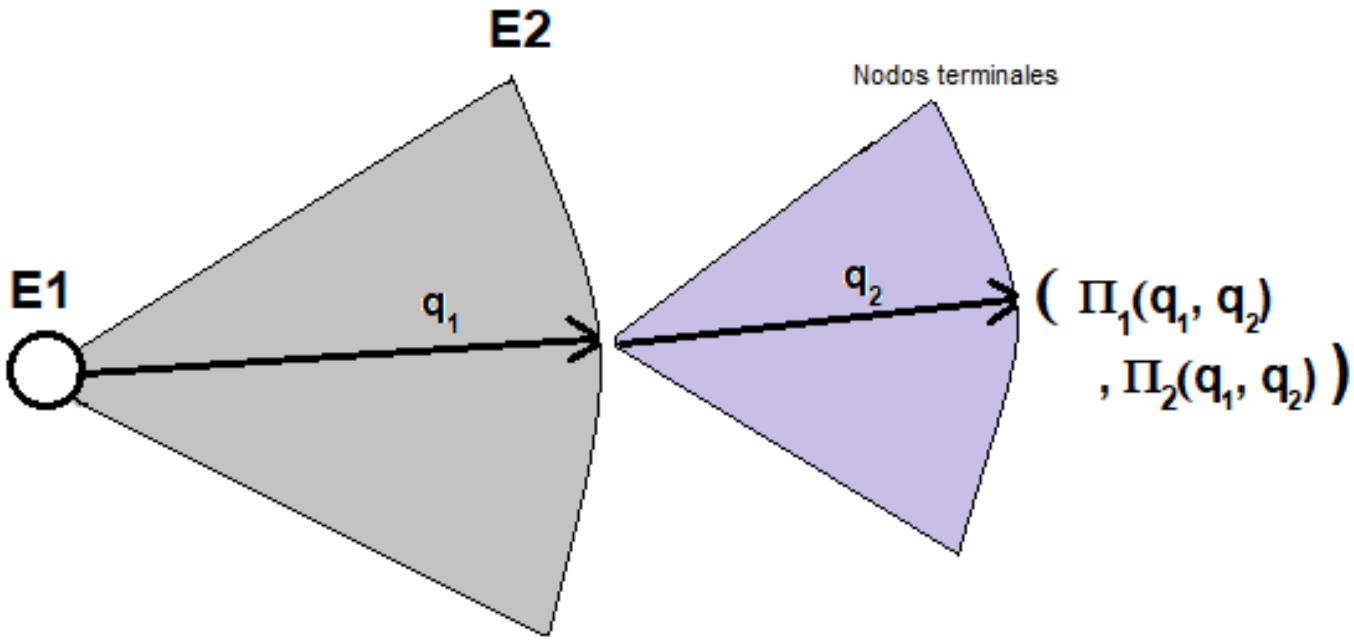
Descripción

- Dos empresa compiten en el mismo mercado, cada una decide la cantidad q_i que coloca en el mercado. La cantidad total es entonces $Q = q_1 + q_2$
- La empresa 1 decide su cantidad primero y la empresa 2 observa esta cantidad y luego decide la suya.
- El precio lo forma la demanda inversa $P = a - bQ$
- Cada empresa tiene una función de costos $C_i(q_i) = cq_i$ con $c < a$.
- El pago de cada empresa es su beneficio:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - c)q_1 - bq_1^2 - bq_1 q_2$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = (a - c)q_2 - bq_2^2 - bq_1 q_2$$

Forma extensiva



Estrategias

- Las estrategias de la empresa 1 son números reales (la cantidad q_1) entre 0 y una cota superior, digamos M.

⊙ Las estrategias de la empresa 2 deben determinar la cantidad q_2 para cada nodo de decisión de $E2$, esto es una función $R_2(\cdot)$ que indican para cada q_1 de la $E1$ la cantidad $q_2 = R_2(q_1)$ que elige la $E2$. (No confundir con la mejor respuesta...)

⊙ De esta manera un perfil de estrategias es $(q_1, R_2(q))$, en particular un Equilibrio de Nash es el $(q_1^*, R_2^*(q))$

⊙ Al perfil de estrategias $(q_1^*, R_2^*(q))$ le corresponde el desarrollo del juego $(q_1^*, R_2^*(q_1^*)) \in \mathbb{R}^2$

Inducción inversa

- Empezamos por la decisión de la $E2$.

⊙ Si $E1$ ha elegido $q_1 = q$, la empresa 2 debe eligir el q_2 (en función de q) que maximiza su pago $\pi_2(q, q_2) = (a - c)q_2 - bq_2^2 - bqq_2$

⊙ Para encontrarlo planteamos $\frac{\partial \pi_2(q,q_2)}{\partial q_2} = 0$ y resolvemos para q_2:

$$q_2 = \frac{(a - c) - bq}{2b}$$

luego

$$R_2(q) = \frac{(a - c) - bq}{2b}$$

y a cada nodo de decisión de $E2$ le corresponde el par de pagos

$$(\pi_1(q_1, R_2(q_1)) \ , \ \pi_2(q_1, R_2(q_1))$$

- Luego $E1$ escoge q_1 que maximiza

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, R_2(q_1)) &= (a-c)q_1 - bq_1^2 - bq_1 R_2(q_1) \\ &= (a-c)q_1 - bq_1^2 - bq_1 \frac{(a-c) - bq_1}{2b} \\ &= \frac{(a-c)q_1 - bq_1^2}{2}\end{aligned}$$

- Derivando respecto de q_1, igualando a cero y despejando, obtenemos:

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}$$

- Hemos encontrado la solución por inducción inversa (un EN):

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a-c}{2b} \\ R_2^*(q) &= \frac{(a-c)-bq}{2b} \end{aligned}$$

  - que genera un desarrollo observado del juego

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a-c}{2b} \\ q_2^* &= R_2^*(q_1^*) = \frac{a-c}{4b} \end{aligned}$$

Marco General

- Dos agentes, 1 y 2, negocian la manera de repartirse un premio de tamaño 1

⊙ El conjunto de arreglos posibles es

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2) \geq 0 \mid x_1 + x_2 = 1\} \\ &= \{(x, 1-x) \mid 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

⊙ El resultado de la negociación es $(x, 1-x) \in X$ o no acuerdo:

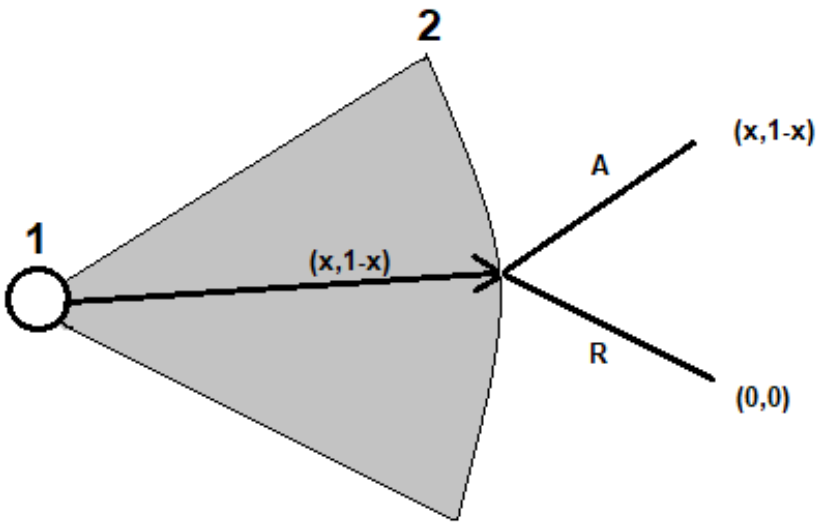
$$0 = x \cup \{N\}$$

⊙ Asumimos que ambos agentes se preocupan por recibir la mayor parte del premio (y eventualmente por el momento en que lo reciben) y que el no acuerdo es indiferente a no recibir nada del premio.

⊙ El resultado de la negociación depende del mecanismo que se use para la misma, veremos un par.

Ultimatum

- El agente 1 hace una propuesta que el agente 2 puede aceptar o rechazar.
  - Si el agente 2 acepta, se divide el premio de acuerdo a lo propuesto por 1.
  - Si el agente 2 rechaza, el resultado es N



Ultimatum

- Encontremos la solución por inducción inversa.
- ¿Qué propuestas acepta el agente 2?⸮ Todas
- ¿Qué ofertas rechaza el agente 2? ⸮ Solo $(1, 0)$
- Existen entonces dos posibles estrategias para 2:
  1. Aceptar cualquier oferta
  2. Aceptar cualquier oferta $(x, 1 - x)$ con $x < 1$ y rechazar la oferta $(1, 0)$

Ultimatum

- Si el agente 2 va a aceptar cualquier oferta, el agente 1 debe ofertar $(1, 0)$. Tenemos una solución por inducción inversa.

⊙ Si el agente 2 va a aceptar cualquier oferta $(x, 1-x)$ con $x < 1$ y rechazar la oferta $(1, 0)$, no podemos encontrar lo que debe hacer 1 (No existe solución por inducción inversa en este caso)

⊙ Estudie el caso con $X = \{(n/M, 1 - n/M) \mid n = 0, 1, 2, \ldots, M\}$ para $M \in \mathbb{N}$

Ofertas sucesivas sin descuento, horizonte finito

- Para cada $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$

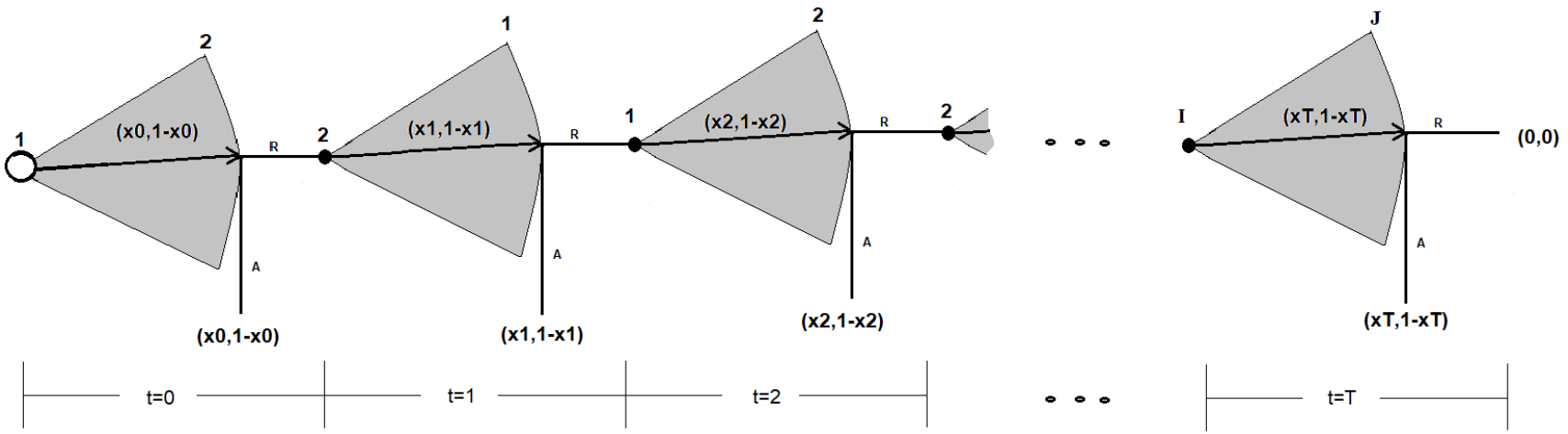
- Si $t = 0, 2, 4, \cdots < T$, el agente 1 hace una propuesta que el agente 2 puede aceptar o rechazar. Si el agente 2 acepta, se divide el premio de acuerdo a lo propuesto por 1. Si el agente 2 rechaza, se pasa al siguiente periodo $t + 1$.

- Si $t = 1, 3, 5, \cdots < T$, el agente 2 hace una propuesta que el agente 1 puede aceptar o rechazar. Si el agente 1 acepta, se divide el premio de acuerdo a lo propuesto por 2. Si el agente 1 rechaza, se pasa al siguiente periodo $t + 1$.

- En $t = T$, el agente que propone es 1 si T es par y 2 si T es impar, el otro responde. El agente indicado hace una propuesta que el otro puede aceptar o rechazar. Si el agente acepta, se divide el premio de acuerdo a lo propuesto. Si el agente rechaza, se termina en no acuerdo.

- El vector de pagos por un acuerdo $(x, 1 - x)$ en t es $(x, 1 - x)$.

Ofertas sucesivas sin descuento, horizonte finito



Ofertas sucesivas sin descuento, horizonte finito

- Sea $X^* = (1, 0)$ si $I = 1$ o $X^* = (0, 1)$ si $I = 2$

⊙ Por inducción inversa:

- En $t = T$, el agente J acepta cualquier oferta. El agente I propone X^*. El nodo inicial en $t = T$ se reemplaza por X^*.

⊙ En $t = T - 1$, el agente I rechaza cualquier oferta que no sea X^*. El agente J propone X^*. El nodo inicial en $t = T - 1$ se reemplaza por X^*.

⊙ Podemos seguir con el mismo esquema de acciones hasta llegar a $t = 0$

⊙ El jugador I siempre propone X^* y rechaza cualquier oferta que no sea X^*. El jugador J acepta cualquier propuesta y siempre propone X^*.

⊙ Si $I = 1$, lo observado del juego es: 1 propone $(1, 0)$ y 2 lo acepta.

⊙ Si $I = 2$, lo observado del juego es: 1 propone $(0, 1)$ y 2 lo acepta.

Ofertas sucesivas con descuento, horizonte finito

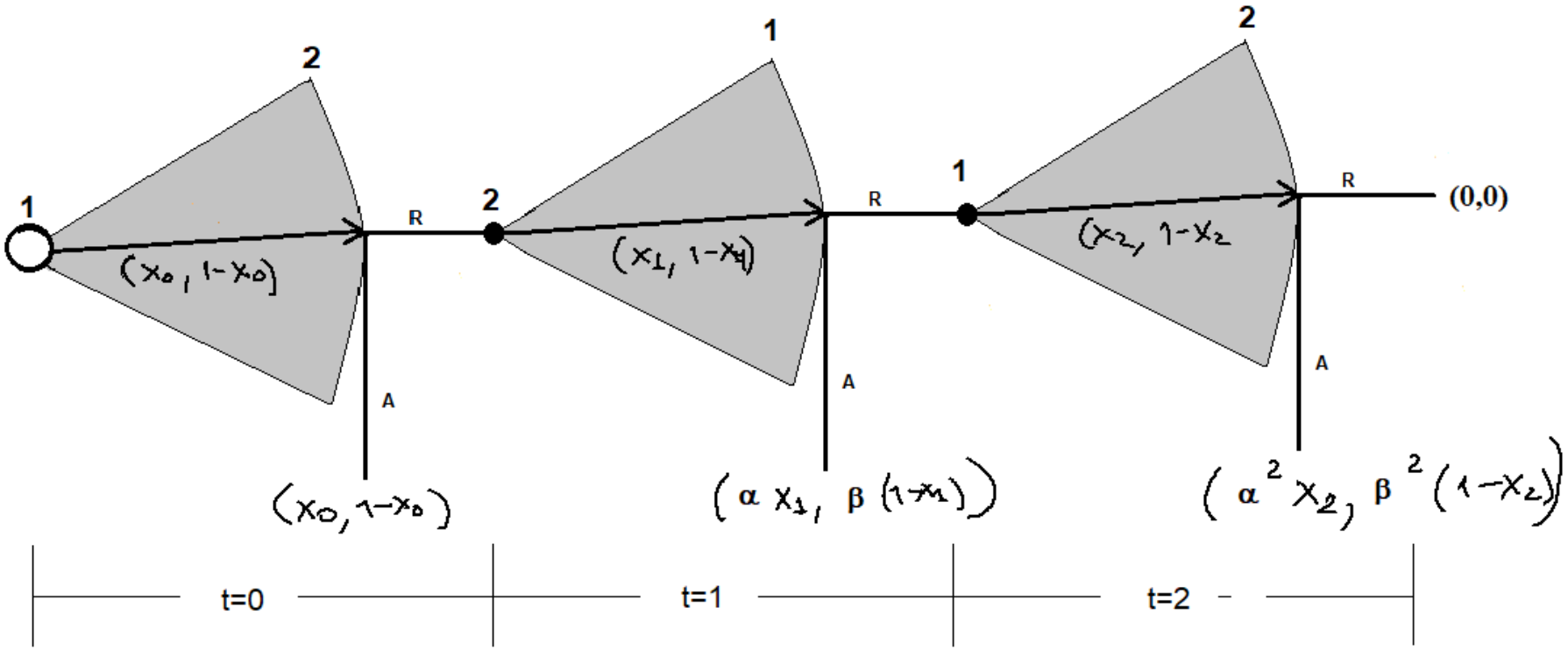
- El mismo esquema del caso anterior salvo por los pagos.

⊙ Para $0 < \alpha \leq 1$ y $0 < \beta \leq 1$, el vector de pagos por un acuerdo $(x, 1-x)$ en t es $(\alpha^t x, \beta^t(1-x))$.

⊙ Cuanto menor el parámetro α o β mayor el descuento del futuro por el agente, ,mayor la impaciencia

Ofertas sucesivas con descuento, horizonte finito

- Veamos El caso con $T = 2$:



Ofertas sucesivas con descuento, horizonte finito

- Por inducción inversa:

- En $t = 2$, el agente 2 acepta cualquier oferta. El agente 1 propone $(1, 0)$. El nodo inicial en $t = 2$ se reemplaza por $(\alpha^2, 0)$.

⊙ En $t = 1$, el agente 1 acepta la oferta $(x_1, 1 - x_1)$ si y solo si $\alpha x_1 \geq \alpha^2$), es decir si y solo si $x_1 \geq \alpha$). El agente 2 propone $(\alpha, 1 - \alpha)$. El nodo inicial en $t = 1$ se reemplaza por $(\alpha^2, \beta(1 - \alpha))$.

⊙ En $t = 0$, el agente 2 acepta la oferta $(x_0, 1 - x_0)$ si y solo si $1 - x_0 \geq \beta(1 - \alpha))$, es decir si y solo si $x_0 \leq 1 - \beta(1 - \alpha))$. El agente 1 propone $(1 - \beta(1 - \alpha), \beta(1 - \alpha))$.

⊙ Hemos encontrado la solución por inducción inversa.

Ofertas sucesivas con descuento, horizonte finito

- En la solución por inducción inversa, el desarrollo observado es: el agente 1 propone $(1-\beta(1-\alpha), \beta(1-\alpha))$ y el agente 2 acepta.
  - El vector de pagos es $(1-\beta(1-\alpha), \beta(1-\alpha))$
  - El pago de un agente crece con su factor de descuento y decrece con el factor de descuento del otro.
  - El pago de un agente crece con su paciencia y con la impaciencia del otro.